Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Matemática 2 de Honor. Enero-Marzo 2014.

Problemario 2

El siguiente problemario es una ligera modificación de uno realizado por Mikel de Viana.

(1) Sea f una función no decreciente en $[a, b]$. Demuestre que f es integrable. Dé un ejemplo de una función no decreciente en $[a, b]$ que sea discontinua en infinitos puntos de $[a, b]$.

(2) Sea f estrictamente creciente. Pruebe que f^{-1} es integrable. Sin utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo, halle $\int_a^b \sqrt[n]{x}$, n natural y $a, b \geq 0$ [observe que ya usted calculó $\int_a^b x^n$]. Luego, si hace un dibujo, es aparente que

$$\int_a^b f^{-1}(x)\ dx = b \cdot f^{-1}(b)\ -\ a \cdot f^{-1}(a)\ -\ \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)\ dx$$

Demuéstrelo.

(3) Demuestre que

$$\int_{ca}^{cb} f(t)\ dt = c \cdot \int_a^b f(ct)\ dt$$

De ésto se sigue que

$$\int_1^a \frac{dt}{t} + \int_1^b \frac{dt}{t} = \int_1^{ab} \frac{dt}{t}$$

(4) Una función $s(x)$ definida sobre $[a, b]$ se dice *escalonada* si existe una partición $\mathcal{P} = [t_0, t_1, ..., t_n]$ de $[a, b]$ tal que $s(x)$ es constante sobre cada (t_i, t_{i+1}) (no importa lo que ocurra en los extremos). Pruebe que $f(x)$ es integrable si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existen funciones escalonadas $S(x)$ y $s(x)$ tales que $S(x) \geq f(x) \geq s(x)$ y, además, $\int_a^b S(x) - s(x)\ dx < \epsilon$.

(5) Demuestre que si f es integrable sobre $[a, b]$ entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe una función continua $g \leq f$ con $\int_a^b f - g\ dx < \epsilon$.

(6) Sea f integrable sobre $[a, b]$. Demuestre que existe $\xi \in [a, b]$ tal que $\int_a^\xi f(x)\ dx = \int_\xi^b f(x)\ dx$. Compruebe, dando un ejemplo, que ξ no necesariamente pertenece al interior de $[a, b]$.

(7) Demuestre que si f es integrable en $[a, b]$ entonces es continua en infinitos puntos de $[a, b]$. [Nota: basta ver que es continua en un punto de $[a, b]$ (¿por qué?). Encuentre ese punto de forma explícita, usando el criterio de integrabilidad de Darboux. Recuerde que la intersección de un encaje de intervalos cerrados es no vacía].

(8) Suponga que f es continua, $f \geq 0$ en $[a, b]$. Demuestre que si $f(\xi) > 0$ para algún $\xi \in [a, b]$ entonces $\int_a^b f(x) > 0$. Demuestre ahora que si g es integrable sobre $[a, b]$ y $g > 0$ en ese intervalo entonces $\int_a^b g(x)\ dx > 0$.

(9) Suponga que f es continua en $[a, b]$ y que $\int_a^b f(x)g(x) = 0$ para todas las funciones continuas g sobre $[a, b]$. Demuestre que $f = 0$. Suponga de nuevo que f es continua sobre $[a, b]$ y tal que $\int_a^b f(x)g(x) = 0$ para todas las funciones continuas $g(x)$ sobre $[a, b]$ tales que $g(a) = g(b) = 0$. Demuestre que $f(x) = 0$.

(10) Demuestre que si f es continua sobre $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b - a) \cdot f(\xi)$$

donde $\xi \in [a, b]$. Compruebe, dando un ejemplo, que la hipótesis de continuidad es esencial.

(11) Suponga $f(x)$ continua en $[a, b]$ y que $g(x)$ es integrable y no negativa en ese mismo intervalo. Pruebe que

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\ dx$$

para algún $\xi \in [a, b]$. Compruebe, dando un ejemplo, que la condición sobre g es esencial.

(12) Suponga que $g(x)$ es una función estrictamente creciente sobre $[a, b]$ y que $f(x)$ es integrable. Demuestre que existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a) \int_a^{\xi} f(t)dt + g(b) \int_{\xi}^b f(t)dt$$